970 函數方程式
$$f(x+y)+g(x-y)=2h(x)+2k(y)$$
二就イテ

春木　博（神戸高等商船）

今，函數方程式

(1)　$f(x+y)+g(x-y)=2h(x)+2k(y)$

ノ可測解 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，$k(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

(1)ニヨリ

$$k(y)=\frac{1}{2}\{f(z+y)+g(z-y)-2h(z)\}$$

故ニ　$k(x+y)+k(x-y)$

$$=\frac{1}{2}\{f(z+x+y)+g(z-x-y)-2h(z)$$
$$+f(z+x-y)+g(z-x+y)-2h(z)\}$$

シカルニ(1)ニヨリ

$$f(z+x+y)+g(z-x+y)=2h(z+y)+2k(x)$$
$$f(z+x-y)+g(z-x-y)=2h(z-y)+2k(x)$$

ナル故

$$k(x+y)+k(x-y)$$
$$=2k(x)+h(z+y)+h(z-y)-2h(z)$$

$h(z+y)+h(z-y)-2h(z)=2p(y)$ トオケバ

(2)　$k(x+y)+k(x-y)=2k(x)+2p(y)$

(2)ハ筆者ノ本誌954談話「二次式ノ函數方程式ニ關シテ」ニ於テ論ジタル函數方程式ナル故、a, b, c ヲ任意ノ實常數トシタルトキ

(3) $k(x)=ax^2+bx+c$

$p(x)=ax^2$

故ニ又 $h(x+y)+h(x-y)=2h(x)+2ay^2$

之ヨリ d, e ヲ任意ノ實常數トシタルトキ

(4) $h(x)=ax^2+dx+e$

(3), (4) ヲ (1) ヘ代入スレバ

(5) $f(x+y)+g(x-y)$

$$=2(ax^2+dx+e)+2(ay^2+by+c)$$

$y=0$ トオケバ

$$f(x)+g(x)=2(ax^2+dx+e)+2c$$

故ニ $g(x)=2(ax^2+dx+e+c)-f(x)$

上式ヲ (5) ヘ代入スレバ

$$f(x+y)-f(x-y)=4axy+2(b+d)y+2c$$

$y=0$ トオケバ

$y=x$ トオケバ $f(2x)=4ax^2+2(b+d)x+l$

$\therefore\ f(x)=ax^2+(b\ \ d)x$ $(l=f(0)$ トオク$)$

$\therefore\ f(x)=ax^2+(b+d)x+l$

結局 a, b, d, e, l ヲ任意ノ實常數トスルトキ

$$\begin{cases} f(x)=ax^2+(b+d)x+l \\ g(x)=ax^2-(b-d)x+2e-l \\ h(x)=ax^2+dx+e \\ k(x)=ax^2+bx \end{cases}$$

（完）